УДК 517.956

А. Ф. Тедеев

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В цилиндре $D=\Omega\times\{t>0\}$, где $\Omega\subset R^n$, $n\geqslant 2$,— неограниченная область с некомпактной границей, рассматривается следующая задача:

$$u_t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{m-1}u_{x_i}),\quad m>1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\nu_i|_{\partial\Omega\times\{t>0\}}=0,$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad x\in\Omega.$$

При определенных условиях на начальную функцию $\varphi(x)$ и геометрию области установлены двусторонние оценки скорости стабилизации при $t\to\infty$ величины $M(t)\equiv\max\limits_{\Omega}|\times$ $\times u(t,x)$.

1. Ведение. Пусть $\Omega\subset R^n$, $n\geqslant 2$, — неограниченная область с достаточно гладкой границей, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Будем считать, что начало координат принадлежит Ω и $|\Omega|=\infty$, где $|\cdot|\equiv\mathrm{mes}$. Рассмотрим в цилиндре $D=\Omega\times\{t>0\}$ решение $u(t,x)$ следующей задачи:

$$u_t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{m-1}u_{x_i}),\quad m>1, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\nu_i|_{\partial\Omega\times\{t>0\}}=0, \tag{2}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad x\in\Omega. \tag{3}$$

Здесь $\nabla u=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$, $u_{x_i}=\partial u/\partial x_i$, $u_t=\partial u/\partial t$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ — границе Ω. Следуя [1, 2], введем некоторые классы областей Ω, в которых изучается задача (1) — (3). Будем говорить, что Ω удовлетворяет условию A, если существуют такие постоянные α_1 и d_1 ($\alpha_1\geqslant n$, $d_1\geqslant 1$) и такая монотонно невозрастающая функция $w_1(R)$, $R>0$, что для всех $R>0$

$$R^{\alpha_1}w_1(R)\leqslant v(R)\leqslant d_1R^{\alpha_1}w_1(R),\quad v(R)=|\Omega_R|,\quad \Omega_R=\Omega\cap\{|x|<R\}.$$

Если существуют такие постоянные α_2 и d_2 ($\alpha_2\leqslant n$, $d_2\leqslant 1$) и монотонно неубывающая функция $w_2(R)$, что для всех $R>0$

$$d_2R^{\alpha_2}w_2(R)\leqslant v(R)\leqslant R^{\alpha_2}w_2(R),$$

то будем говорить, что Ω удовлетворяет условию $Б$.

Пусть R — произвольное положительное число, а Q — произвольное открытое подмножество Ω_R, для которого $\partial Q\cap\Omega_R$ принадлежит объединению конечного числа $(n-1)$-мерных плоскостей и сфер.

Рассмотрим функцию

$$l(v,R)=\inf_{\substack{Q\subset\Omega_R\\|Q|=v}}\mathrm{mes}_{n-1}(\partial Q\cap\Omega_R).$$

Пусть непрерывная на множестве $\{v\geqslant 0,\ R\geqslant 0\}$ функция $g(v,R)$ монотонно не убывает по переменному v и монотонно не возрастает по переменному R, $g(0,R)=0$, и $\forall R>0$ существуют такие положительные постоянные ε_0 ($\varepsilon_0\leqslant 1/n$), c_0 и δ_0, что $g(v,R)\geqslant c_0v^{1-\varepsilon_0}$ при $0<v<\delta_0$. Скажем, что

Ω удовлетворяет условию (4), если

$$i(v, R) \geqslant g(v, R), \quad R > 0, \quad 0 < v < v(R)/2. \tag{4}$$

Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\sigma(\alpha, \beta)$, где $0 < \alpha < 1$, $(n-1)/n \leqslant \beta < 1$, если существуют такие положительные постоянные a и b, что для всех $R > 0$ и $v \in (0, v(R)/2]$ $l(v, R)$ удовлетворяет неравенству

$$l(v, R) \geqslant \min\{bv^{\beta}, aR^{-\alpha}\}. \tag{5}$$

Наконец, скажем, что Ω удовлетворяет условию (6), если для всех $R > 0$

$$v(R) \leqslant dR^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6}$$

Отметим (см. [2]), что если Ω удовлетворяет условиям $Б$ и (6), то она удовлетворяет также и условию A. Приведем пример (см. [1], [2]).

Пример. Пусть $n = 2$ и $\Omega^{(F)} = \{x_1 > 0;\ |x_2| < F(x_1)\}$, где $F(x_1)$ — монотонно невозрастающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая неравенствам

$$F(x_1) \geqslant c_1 x_1^{-\alpha} \text{ при } x_1 > 1, \quad c_1 > 0, \tag{7}$$

$$F(0) - F(x_1) \leqslant c_2 x_1^{(1-\beta)/\beta} \text{ при } x_1 \leqslant 1. \tag{8}$$

Тогда $\Omega^{(F)}$ принадлежит классу $\sigma(\alpha, \beta)$. Кроме того, область $\Omega^{(F)}$ удовлетворяет условию A. Потребуем дополнительно, чтобы существовали положительные постоянные $\alpha_0 < 1$, $d_0 \leqslant 1$ и R и такая монотонно неубывающая функция $w_0(R)$, $R > R_0$, что для всех $R > R_0$

$$R^{-\alpha_0} w_0(R) \geqslant F(R) \geqslant d_0 R^{-\alpha_0} w_0(R).$$

Тогда $\Omega^{(F)}$ удовлетворяет условию $Б$ с $\alpha_2 = 1 - \alpha_0$.

Таким образом, введенные классы областей охватывают степенным образом сужающиеся на бесконечности области. Для областей класса $\sigma(\alpha, (n-1)/n)$, удовлетворяющих условиям $Б$ и (6), в работе [2] получены точные двусторонние оценки скорости стабилизации решения второй смешанной задачи для линейного параболического уравнения второго порядка при определенных условиях на начальную функцию. В [3] для решения аналогичной задачи еще в более широком классе областей и начальных функций найдена характеристика, обеспечивающая точные оценки сверху и снизу при $t \to \infty$. Обзор работ по стабилизации решений различных нелинейных задач приведен в [4]. Цель данной работы — выделение класса областей Ω и начальных функций $\varphi(x)$, которые обеспечивают точные двусторонние оценки скорости стабилизации $M(t) = \max\limits_{\Omega} u(t, x)$ при $t \to \infty$. По методике исследования данная работа примыкает к [1, 2] и развивает их. В частности, обобщается итеративный метод Мозера для получения равномерной оценки сверху. Полученные при этом промежуточные результаты представляют и самостоятельный интерес.

2. Вспомогательные утверждения. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что начальная функция $\varphi(x)$ неотрицательна и принадлежит пространству $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и, кроме того, имеет конечный момент μ_0:

$$\mu_0 = \int\limits_{\Omega} |x| \varphi(x)\, dx.$$

Пусть $D_T = \Omega \times (0, T)\ \forall T > 0$. Через $W^{1,1}_{p,2}(D_T)$ обозначим замыкание по норме

$$\left(\int\limits_{D_T} (f^2(t, x) + f_t^2(t, x))\, dxdt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{D_T} |\nabla f|^p dxdt\right)^{1/p}$$

функции из класса $C_0^\infty(R^{n+1})$, а через $W^{1,0}_{p,2}(D_T)$ — замыкание $C_0^\infty(R^{n+1})$ по норме

$$\left(\int\limits_{D_T} f^2(t, x)\, dxdt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{D_T} |\nabla f|^p\, dxdt\right)^{1/p}.$$

Введем понятие решения задачи (1) — (3) в D. Под обобщенным решением задачи (1) — (3) в D_T будем понимать функцию $u(t, x)$ из $W^{1,0}_{m+1,2}(D_T) \cap \cap L_\infty(D_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D_T} (-\eta_t u + |\nabla u|^{m-1} \nabla u \nabla \eta)\, dx dt = \int_\Omega \eta(0, x)\, \varphi(x)\, dx \tag{9}$$

при всех $\eta(t, x) \in W^{1,1}_{m+1,2}(D_T)$, таких, что $\eta(T, x) = 0$.

Функция $u(t, x)$ — решение задачи (1) — (3) в D, если она является решением той же задачи в D_T для всех $T > 0$. Существование и единственность доказывается обычными методами.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельный интерес.

Лемма 1 (оценка интеграла Дирихле). Пусть Ω удовлетворяет условиям Б и (4) и действительные числа l, q, r, γ, λ удовлетворяют неравенствам $0 < l \leqslant q < \lambda \leqslant \gamma < r, q \geqslant 1$. Тогда для любой функции $f(x) \in W^1_\gamma(\Omega) \cap \cap L_\lambda(\Omega) \cap L_r(\Omega)$ с конечным моментом

$$\mu_l = \int_\Omega |x|\, |f(x)|^l\, dx$$

имеет место неравенство

$$\int_\Omega |\nabla f|^\gamma dx \geqslant c \frac{E_\lambda^{\frac{\gamma-q}{\lambda-q}}}{E_q^{\frac{\gamma-\lambda}{\lambda-q}} \mathscr{P}\left(c\, \dfrac{E_q^{\lambda/(\lambda-q)}}{E_\lambda^{q/(\lambda-q)}},\ c\mu_l\, \dfrac{E_r^{\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}}}{E_\lambda^{1/\alpha_3}}\right)}, \tag{10}$$

где

$$E_p = \int_\Omega |f|^p\, dx, \quad \alpha_3 = \frac{r-\lambda}{r-l},$$

$$\mathscr{P}(v, R) = \int_0^v \left(\ln \frac{v}{\xi}\right)^{\gamma-2} \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi \frac{\theta^{\gamma-1}}{(g(\theta, R))^\gamma}\, d\theta.$$

Доказательство леммы опускаем. Оценка (10) обобщает теорему работы [1], доказанную там для $\gamma = \lambda = 2$.

Предложение 1 (закон сохранения энергии). Для решения задачи (1) — (3) $\forall\, t > 0$ справедливо равенство

$$\int_\Omega u(t, x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x)\, dx. \tag{11}$$

Предложение 2 (оценка момента). Пусть область Ω удовлетворяет условию A. Тогда для всех $t > 0$ момент

$$\mu(t) = \int_\Omega |x|\, u(t, x)\, dx$$

решения задачи (1) — (3) удовлетворяет неравенству

$$\mu(t) \leqslant 2\mu_0 + c t^{\frac{1}{m+1}} \tilde{M}^{\frac{m-1}{m+1}}(t) \ln\left(\frac{c t^{\frac{1}{m+1}} \tilde{M}^{(m-1)/(m+1)}(t)}{R(c/\tilde{M}(t))}\right). \tag{12}$$

Здесь $\tilde{M}(t), t > 0$ — произвольная функция, оценивающая $M(t)$ и удовлетворяющая условию:

I) $\tilde{M}(t)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\delta, T] \subset (0, \infty)$ и существует такая постоянная $\varkappa_0 : 0 < \varkappa_0 < 1/(m-1)$, что для всех $t > 0$

$$0 \leqslant -\frac{d\tilde{M}(t)}{dt} \leqslant \varkappa_0 \frac{\tilde{M}(t)}{t},$$

$R(s)$ — обратная к $v(R)$ функция.

Доказательство предложений 1 и 2 опускаем.

Замечание 1. В роли $\tilde{M}(t)$ в силу принципа максимума можно взять $M_0 = \sup\limits_{\Omega} \varphi(x)$. Тогда неравенство (12) примет вид

$$\mu(t) \leqslant 2\mu_0 + ct^{\frac{1}{m+1}} \ln^+ (ct^{\frac{1}{m+1}}).$$

Замечание 2. Пусть $\tilde{\mu}(t)$ — произвольная оценивающая сверху момент $\mu(t)$ функция: $\mu(t) \leqslant \tilde{\mu}(t)\ \forall\, t > 0$. Тогда в силу предложения 1

$$\|\varphi\|_{L_1(\Omega)} = \|u(t, x)\|_{L_1(\Omega)} \leqslant M(t)\, v(R) + \frac{\tilde{\mu}(R)}{R}, \quad t > 0.$$

Выбирая

$$R = 2\tilde{\mu}(t)/\|\varphi\|_{L_1(\Omega)},$$

получаем оценку снизу

$$M(t) \geqslant \frac{\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}}{2v\,(2\tilde{\mu}(t)/\|\varphi\|_{L_1(\Omega)})}. \tag{13}$$

3. Равномерные оценки решения. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть область Ω принадлежит классу $\sigma(\alpha, \beta)$ и удовлетворяет условиям *Б* и (6), причем $m - 1 \leqslant 1/\alpha^3$. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha, \beta, m)$, $\gamma_2 = \gamma_2(\alpha, \beta, m)$, удовлетворяющие условиям: $\gamma_1(\alpha, \beta, 1) = \gamma_2(\alpha, \beta, 1)$ и $\gamma_1(\alpha, \alpha, m) = \gamma_2(\alpha, \alpha, m) = (1-\alpha)/((m-1) \times (1-\alpha) + m + 1)$, и такие, что для решения задачи (1) — (3) в D справедливы оценки:

$$M(t) \leqslant Ct^{-\gamma_1}, \tag{14}$$

$$M(t) \geqslant ct^{-\gamma_2} \tag{15}$$

при достаточно больших $t > 0$.

Для доказательства теоремы нам потребуется еще одно утверждение. Прежде чем его формулировать, рассмотрим следующие предположения. Пусть $\tilde{E}_p(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ — непрерывные на полуоси функции, оценивающие соответственно $E_p(t)$ и $\mu(t)$ $(p > 1)$. Будем говорить, что $\tilde{E}_p(t)$ удовлетворяет условию II, если функция $\tilde{E}_p(t)\, t^{\frac{p-1}{(m-1)(1-\beta)+(m+1)}}$ монотонно не убывает.

Кроме того, будем говорить, что $\tilde{\mu}(t)$ удовлетворяет условию III, если функция $\tilde{\mu}(t)$ монотонно не убывает.

Лемма 2. Пусть область Ω принадлежит классу $\sigma(\alpha, \beta)$ и удовлетворяет условию *Б*. Тогда для решения задачи (1) — (3) в D для любых чисел q, p, r, удовлетворяющих неравенствам: $1 \leqslant q < p < r$, $p + m \leqslant q(m+1)$, $p + m < r$, $\frac{p+1}{p+1-q} \leqslant s$, $\frac{r}{r-p-1} \leqslant s$ с некоторой $s > 0$ и любых функций $\tilde{E}_q(t)$, $\tilde{E}_r(t)$, удовлетворяющих условию II, и для $\tilde{\mu}(t)$, удовлетворяющей условию III, при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$E_{p+1}(t) \leqslant \tilde{E}_{p+1}(t) = \max\Big\{(\bar{c}(p, m))^{\frac{1}{(m+1)\delta}}\, t^{-\frac{1}{(m+1)\delta}} \times$$
$$\times (\tilde{E}_q(t))^{\left(\frac{m-1}{(m+1)(p+1-q)\delta} + \frac{(p+1)(1-\beta)}{(p+1-q)\delta}\right)^{1/(1-\varkappa)}}, \quad (\bar{c}(p, m))^{\frac{1}{(m+1)\delta}}\, t^{-\frac{1}{(m+1)\delta}} \times$$
$$\times (\tilde{\mu}(t))^{\frac{\alpha}{\delta}}\, (\tilde{E}_q(t))^{\frac{(p+1)(p+1-q)}{\delta}}\, (\tilde{E}_r(t))^{\frac{p\alpha}{(r-p-1)\delta}}\Big\}, \tag{16}$$

где

$$\delta = \frac{(r-1)\alpha}{r-1-p} + \frac{q}{p+1-q} + \frac{m-1}{(m+1)(p+1-q)};$$

$$\varkappa = \frac{1}{\delta}\left(\frac{q\beta}{p+1-q} + \frac{(r-1)\alpha}{r-p-1}\right); \quad \bar{c}(p, m) = \left(\frac{Kp}{c(p, m)}\right)^{1/(m+1)\delta};$$

$$c(p, m) = \frac{p(p+1)(m+1)^{m+1}}{(p+m)^{m+1}};$$

K от p не зависит.

Доказательство леммы 2, базирующееся на лемме 1 и равенстве

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(u(t,x))^{p+1}\,dx = -c(p,m)\int\limits_{\Omega}|\nabla u^{\frac{p+m}{m+1}}|^{m+1}\,dx \quad \forall\, t>0,$$

опускаем.

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность чисел $\{p_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, полагая

$$p_k = 1 + l + \cdots + l^k = (l^{k+1}-1)/(l-1).$$

Здесь $\max\{1, (m-1)^{1/3}\} < l < \min\left\{\frac{2m+1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right\}$. Тогда легко проверить, что

$$p_{k+1}+m-1 \leqslant p_k(m+1), \quad p_{k+2} > p_{k+1}+m, \quad p_{k+1}/(p_{k+1}-p_k) \leqslant \frac{l}{l-1}.$$

Положим теперь в оценке (16) $q=p_{k-1}$, $p+1=p_k$, $r=p_{k+1}$. Тогда

$$\delta = \frac{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}{p_k-p_{k-1}}, \quad \varkappa = \frac{(1-\beta)(p_{k-1}+\bar{\alpha})}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}},$$

$$\bar{c}(p_k, m) = \bar{c}_k = \left(\frac{K(p_k-1)}{c(p_k, m)}\right)^{1/(m+1)\delta},$$

где $\bar{\alpha} = (m-1)/(m+1)$.

После несложных преобразований получаем

$$E_{p_k}(t) \leqslant \max\left\{\left(\frac{\bar{c}_k}{t}\right)^{\frac{l^k}{(m+1)(1-\beta)(p_{k-1}+\bar{\beta})}}(\tilde{E}_{p_{k-1}}(t))^{\frac{p_k+\bar{\beta}}{p_{k-1}+\bar{\beta}}},\right.$$

$$\left(\frac{\bar{c}_k}{t}\right)^{\frac{l^k}{(m+1)(p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha})}}(\tilde{\mu}(t))^{\frac{\alpha l^k}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}(\tilde{E}_{p_{k-1}}(t))^{\frac{p_k}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}\times$$

$$\left.\times(\tilde{E}_{p_{k+1}}(t))^{\frac{\alpha p_{k-1}}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}\right\}, \tag{17}$$

где $\bar{\beta} = \bar{\alpha}/(1-\beta)$, а функции $\tilde{E}_{p_k}(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ удовлетворяют соответственно условиям II и III. Обозначим через I_k оператор

$$I_k f(t) = \left(\frac{\bar{c}_k}{t}\right)^{\frac{l^k}{(m+1)(1-\beta)(p_{k-1}+\bar{\beta})}}(f(t))^{\frac{p_k+\bar{\beta}}{p_{k-1}+\bar{\beta}}},$$

а через $J_k(\tilde{E}_{p_{k+1}})f(t)$ — оператор

$$J_k(\tilde{E}_{p_{k+1}})f(t) = \left(\frac{\bar{c}_k\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{p_k p_{k-1}}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}(\tilde{E}_{p_{k+1}}(t))^{\frac{\alpha p_{k-1}}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}\times$$

$$\times(f(t))^{\frac{p_k}{p_{k-1}+\alpha p_k+\bar{\alpha}}}.$$

Неравенство (17) тогда перепишется в виде

$$E_{p_k}(t) \leqslant \max\{I_k\tilde{E}_{p_{k-1}}(t), \quad J_k(\tilde{E}_{p_{k+1}})\tilde{E}_{p_{k-1}}(t)\}. \tag{18}$$

Докажем, что при любом $k \geqslant 2$

$$E_{p_k}(t) \leqslant \tilde{E}_{p_k}(t) \equiv \max\{A_k^{(1)}(t), \ldots, A_k^{(2^{k-1})}(t)\}, \tag{19}$$

где функции $A_k^{(i)}$ имеют вид

$$A_k^{(i)}(t) = A_k^{(i)}(t; \tilde{E}_{p_{k+1}}(t)) = \left[C_k^{(i)}\left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{K_k^{(i)}}\tilde{E}_{p_1}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\left(t^{-\frac{1}{m+1}}\right)^{\frac{\mathscr{L}_k^{(i)}}{(1-\beta)}}\right]^{\zeta_k^{(i)}}(\tilde{E}_{p_{k+1}}(t))^{\varkappa_k^{(i)}}, \tag{20}$$

причем каждая из функций $A_k^{(i)}(t)$, а значит и $\tilde{E}_{p_k}(t)$ удовлетворяют условию II для $i = 1, \ldots, 2^{k-1}$, $C_k^{(i)} > 0$, $K_k^{(i)} \geqslant 0$, $\mathscr{L}_k^{(i)} \geqslant 0$, $\zeta_k^{(i)} > 0$, $0 \leqslant \varkappa_k^{(i)} < \alpha$.

При $k = 2$ неравенство (19) легко проверяется. Предположим, что оно справедливо при $k = s$ и докажем его для $k = s+1$. Функция $\tilde{E}_{p_s}(t)$ по предложению удовлетворяет условию II, значит ее можно подставить в (18). Это дает

$$E_{p_{s+1}}(t) \leqslant \tilde{E}_{p_{s+1}}(t) = \max\{\max I_{s+1} A_s^{(i)}(t),$$

$$\max J_{s+1}(\tilde{E}_{p_{s+2}}) A_s^{(i)}(t)\} = \max\{\tilde{A}_{s+1}^{(1)}(t), \ \ldots, \ \tilde{A}_{s+1}^{(2^s)}(t)\}, \tag{21}$$

где функция $\tilde{A}_{s+1}^{(j)}(t)$ равна либо (при $j = 1, \ldots, 2^{s-1}$) $I_{s+1} A_s^{(i)}(t)$, либо (при $j = 2^{s-1}+1, \ldots, 2^s$) $J_{s+1}(\tilde{E}_{p_{s+2}}) A_s^{(i)}(t)$ с некоторым i, т. е., либо (при $j \leqslant 2^{s-1}$)

$$\tilde{A}_{s+1}^{(j)}(t) = \left(\frac{\bar{c}_{s+1}}{t}\right)^{\frac{l^{s+1}}{(m+1)(1-\beta)(p_s+\bar{\beta})}} [A^{(i)}(t;\ \tilde{E}_{p_{s+1}})]^{\frac{p_{s+1}+\bar{\beta}}{p_s+\bar{\beta}}},$$

где

$$A_s^{(i)}(t;\ \tilde{E}_{p_{s+1}}) = \left[C_s^{(i)}\left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{K_k^{(i)}} \tilde{E}_{p_1}(t)\left(\frac{1}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{\mathscr{L}_s^{(i)}}{(1-\beta)}}\right]^{\zeta_s^{(i)}} \times$$

$$\times (E_{p_{s+1}}(t))^{\varkappa_{s+1}^{\prime(j)}}, \quad \varkappa_{s+1}^{\prime(j)} = \frac{(p_{s+1}+\bar{\beta})}{p_s+\bar{\beta}} \varkappa_s^{(i)},$$

либо (при $j > 2^{s-1}$)

$$\tilde{A}_{s+1}^{(j)}(t) = \left(\left(\frac{\bar{c}_{s+1}}{t}\right)^{\frac{1}{m+1}} \tilde{\mu}^{\alpha}(t)\right)^{\frac{p_{s+1}-p_s}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}}} (\tilde{E}_{p_{s+2}}(t))^{\frac{\alpha p_s}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}}} \times$$

$$\times [A_s^{(i)}(t;\ \tilde{E}_{p_{s+1}})]^{\frac{p_{s+1}}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}}},$$

где

$$A_s^{(i)}(t;\ \tilde{E}_{p_{s+1}}) = \left[C_s^{(i)}\left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{K_s^{(i)}} \tilde{E}_{p_1}(t)\left(\frac{1}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{\mathscr{L}_s^{(i)}}{1-\beta}}\right]^{\zeta_s^{(i)}} \tilde{E}_{p_{s+1}}^{\varkappa_s^{(i)}}(t).$$

Пусть $\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)} = \varkappa_s^{(i)} p_{s+1}/(p_s + \alpha p_{s+1} + \bar{\alpha})$. По индукции можно показать, что $\forall\, k > 1$

$$(\alpha K_k^{(i)} + p_1)\zeta_k^{(i)} + p_{k+1}\varkappa_k^{(i)} = p_k - \gamma_k^{(i)}, \tag{22}$$

где $\gamma_k^{(i)} > 0$, причем имеют место следующие реккурентные соотношения. В первом случае ($j \leqslant 2^{s-1}$)

$$\zeta_{s+1}^{(j)} = \zeta_s^{(i)} \frac{(p_{s+1}+\bar{\beta})}{p_s+\bar{\beta}-(p_{s+1}+\bar{\beta})\varkappa_s^{(i)}}, \quad K_{s+1}^{(j)} = K_s^{(i)}, \quad \varkappa_{s+1}^{(j)} = 0,$$

$$\gamma_{s+1}^{(j)} = \frac{\gamma_s^{(i)}(p_{s+1}+\bar{\beta}) + \bar{\beta}(p_{s+1}-p_s)}{p_s+\bar{\beta}-\varkappa_s^{(i)}(p_{s+1}+\bar{\beta})}. \tag{23}$$

Во втором случае ($j > 2^{s-1}$)

$$\zeta_{s+1}^{(j)} = \zeta_s^{(i)} \frac{p_{s+1}}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}-\varkappa_s^{(i)} p_{s+1}}, \quad K_{s+1}^{(j)} = K_s^{(i)} + \frac{l^{s+1}}{p_{s+1}\zeta_s^{(i)}},$$

$$\varkappa_{s+1}^{(j)} = \frac{\alpha p_s}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}-\varkappa_s^{(i)} p_{s+1}}, \quad \gamma_{s+1}^{(j)} = \frac{p_{s+1}(\bar{\alpha}+\gamma_s^{(i)})}{p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha}-\varkappa_s^{(i)} p_{s+1}}. \tag{24}$$

Далее, легко показать, что $\varkappa_{s+1}^{\prime(j)} < 1$, $\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)} < 1$. Покажем, например, что $\varkappa_{s+1}^{\prime(j)} < 1$. Из равенств (22), (23) имеем

$$(\alpha K_s^{(i)} + p_1)\,\zeta_s^{(i)} \frac{(p_{s+1}+\bar{\beta})}{(p_s+\bar{\beta})} + p_{s+1}\varkappa_{s+1}^{\prime(j)} = \frac{(p_{s+1}+\bar{\beta})}{(p_s+\bar{\beta})}(p_s - \gamma_s^{(i)}) < p_{s+1},$$

т. е. $\varkappa_{s+1}^{\prime(j)} < 1$. Воспользуемся теперь леммой, доказанной в [2].

Лемма 3. Предположим, что из того, что функция $g(t)$, $t > 0$ удовлетворяет для всех $t \in (0, \infty)$ неравенству $g(t) \leqslant \tilde{g}'(t)$ с какой-нибудь функцией $\tilde{g}'(t)$, удовлетворяющей некоторому условию Y, вытекает, что она удовлетворяет для всех $t \in (0, \infty)$ и неравенству

$$g(t) \leqslant \tilde{g}''(t) = \max\{A(t)\,\tilde{g}'^{\varkappa},\ B(t)\},$$

где $A(t) > 0$ и $B(t) > 0$, $t > 0$ — заданные функции, $0 < \varkappa < 1$, и $\tilde{g}''(t)$ также удовлетворяет условию Y. Пусть, кроме того, существует хотя бы одна удовлетворяющая условию Y функция $\tilde{g}_0(t)$, оценивающая на $(0, \infty)$ функцию $g(t)$:

$$g(t) \leqslant \tilde{g}_0(t), \quad t > 0,$$

и условие Y таково, что если все $\tilde{g}_k(t)$, $t > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют Y и $\tilde{g}_k'(t) \to \tilde{g}_\infty(t)$ при $k \to \infty$ для всех $t \in (0, \infty)$, то и $\tilde{g}_\infty(t)$ удовлетворяет условию Y. Тогда $\tilde{g}(t) \leqslant \tilde{g}(t) = \max\{(A(t))^{\frac{1}{1-\varkappa}}, B(t)\}$ и $g(t)$ удовлетворяет условию Y.

Продолжим доказательство теоремы. Возьмем произвольные, удовлетворяющие условию II, оценки функции $E_{p_{s+1}}(t)$, подставив их минимум и увеличим правую часть полученного неравенства. Затем применим лемму 3 к каждому члену $\tilde{A}_{s+1}^{(j)}(t)$. В результате получим требуемую оценку при $k = s+1$. Каждая из функций $A_{s+1}^{(j)}(t)$ при этом удовлетворяет условию II. В первом случае

$$A_{s+1}^{(j)}(t) = \Bigg[C_s^{(i)}(\bar{c}_{s+1})^{\frac{l^{s+1}}{(m+1)(1-\beta)(p_{s+1}+\bar{\beta})}}\left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{K_s^{(i)}}\bar{E}_{p_1}(t)\times$$

$$\times\left(t^{-\frac{1}{m+1}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}\left(\mathscr{L}_s^{(i)}+\frac{l^{s+1}}{(p_{s+1}+\bar{\beta})\zeta_s^{(i)}}\right)}\Bigg]^{\frac{(p_{s+1}+\bar{\beta})}{(p_s+\bar{\beta})}\zeta_s^{(i)}\frac{1}{(1-\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)})}},$$

значит $C_{s+1}^{(j)} = C_s^{(i)}(\bar{c}_{s+1})^{\frac{l^{s+1}}{(p_{s+1}+\bar{\beta})(m+1)(1-\beta)\zeta_s^{(i)}}} > 0$,

$$\mathscr{L}_{s+1}^{(j)} = \mathscr{L}_s^{(i)} + \frac{l^{s+1}}{(p_{s+1}+\bar{\beta})\,\zeta_s^{(i)}} > 0.$$

Во втором случае

$$A_{s+1}^{(j)}(t) = \Bigg[C_s^{(i)}(\bar{c}_{s+1})^{\frac{1}{(m+1)}\frac{(p_{s+1}-p_s)}{p_{s+1}\zeta_s^{(i)}(1-\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)})}}\left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{p_{s+1}-p_s}{p_{s+1}\zeta_s^{(i)}}+K_s^{(i)}}\times$$

$$\times\tilde{E}_{p_1}(t)\left(\frac{1}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{\mathscr{L}_s^{(i)}}{(1-\beta)}}\Bigg]^{\zeta_s^{(i)}\frac{p_{s+1}}{(p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha})(1-\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)})}}(\tilde{E}_{p_{s+2}}(t))^{\frac{\alpha p_s}{(p_s+\alpha p_{s+1}+\bar{\alpha})(1-\varkappa_{s+1}^{\prime\prime(j)})}},$$

значит $C_{s+1}^{(j)} = C_s^{(i)}(\bar{c}_{s+1})^{\frac{1}{(m+1)}\frac{l^{s+1}}{p_{s+1}\zeta_s^{(i)}}}$, $\mathscr{L}_{s+1}^{(j)} = \mathscr{L}_s^{(i)} \geqslant 0$.

Таким образом, (19) доказано. Для удобства введем новую нумерацию членов $A_k^{(i)}(t)$. При $k = 1$ $A_1^{(1,1)} = E_{p_1}(t)$, $\varkappa_1^{(1)} = 0$, $C_1^{(1,1)} = 1$, $K_1^{(1,1)} = 0$,

$\mathscr{L}_1^{(1,1)} = 0$, $\zeta_1^{(1,1)} = 1$. При $k = 2$:

$$A_2^{(1,1)}(t) = I_2\tilde{E}_{p_1}(t) = I_2' A_1^{(1,1)}(t), \quad \varkappa_2^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1,1)} = (\bar{c}_2)^{\overline{\frac{l^2}{(m+1)(1-\beta)(p_2+\bar{\beta})}}},$$

$$K_2^{(1,1)} = 0, \quad \mathscr{L}_2^{(1,1)} = l^2/(p_2 + \bar{\beta}), \quad \zeta_2^{(1,1)} = (p_2 + \bar{\beta})/(p_1 + \bar{\beta});$$

$$A_2^{(2,1)} = J_2\tilde{E}_{p_1}(t) = J_2' A_1^{(1,1)}(t), \quad \varkappa_2^{(2)} = \frac{\alpha p_1}{p_1 + \alpha p_2 + \bar{\alpha}},$$

$$C_2^{(2,1)} = (\bar{c}_2)^{\overline{\frac{l^2}{(m+1)p_2}}}, \quad K_2^{(2,1)} = \frac{l^2}{p_2}, \quad \mathscr{L}_2^{(2,1)} = 0, \quad \zeta_2^{(2,1)} = p_2/(p_1 + \alpha p_2 + \bar{\alpha}).$$

Аналогично, при $k = 3$ имеем четыре члена. Например,

$$A_3^{(1,1)}(t) = I_1 I_2 \tilde{E}_{p_1} = I_3' A_2^{(1,1)}(t), \quad A_3^{(3,1)}(t) = [J_3(\tilde{E}_{p_4}) J_2(1)\tilde{E}_{p_1}(t)]^{\overline{\frac{1}{1-\varkappa_3''}}} =$$
$$= J_3' A_2^{(2,1)}(t).$$

Обозначим $I_k' A_{k-1}^{(i,j)}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{k-i-2}$ через $A_k^{(1,q)}(t)$, где $q = j + \sum_{s=1}^{i-1} 2^{k-s-2}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{k-2}$. При этом

$$C_k^{(1,q)} = C_{k-1}^{(i,j)} (\bar{c}_k)^{\overline{\frac{l^k}{(m+1)(1-\beta)(p_k+\bar{\beta})}}}, \quad K_k^{(1,q)} = K_{k-1}^{(i,j)},$$

$$\mathscr{L}_k^{(1,q)} = \mathscr{L}_{k-1}^{(i,j)} + \frac{l^k}{\zeta_{k-1}^{(i,j)}(p_k + \bar{\beta})}, \quad \zeta_k^{(1,q)} = \zeta_{k-1}^{(i,j)} \frac{(p_k + \bar{\beta})}{(p_{k-1} + \bar{\beta} - (p_k + \bar{\beta})\varkappa_{k-1}^{(j)})},$$

$$\gamma_k^{(1,q)} = \frac{\gamma_{k-1}^{(i,j)}(p_k + \bar{\beta}) + \bar{\beta}(p_k - p_{k-1})}{p_{k-1} + \bar{\beta} - \varkappa_{k-1}^{(i)}(p_k + \bar{\beta})}.$$

Обозначим $J_k' A_{k-1}^{(i,j)}(t)$ через $A_k^{(i+1,j)}(t)$. Отметим, что для всех членов $A_k^{(i+1,j)}(t)$ с одинаковым индексом $i+1$ показатель при $\tilde{E}_{p_{k+1}}$ один и тот же, обозначим его

$$\varkappa_k^{(i+1)} = \frac{\alpha p_{k-1}}{p_{k-1} + \alpha p_k + \bar{\alpha} - \varkappa_{k-1}^{(i)} p_k},$$

а остальные вычисляются по формулам

$$C_k^{(i+1,j)} = C_k^{(i,j)} (\bar{c}_k)^{\overline{\frac{l^k}{(m+1)p_k \zeta_{k-1}^{(i,j)}}}}, \quad K_k^{(i+1,j)} = K_{k-1}^{(i,j)} + \frac{l^k}{p_k \zeta_{k-1}^{(i,j)}},$$

$$\mathscr{L}_k^{(i+1,j)} = \mathscr{L}_{k-1}^{(i,j)}, \quad \zeta_k^{(i+1,j)} = \zeta_{k-1}^{(i,j)} \frac{p_k}{p_{k-1} + \alpha p_k + \bar{\alpha} - \varkappa_{k-1}^{(i)} p_k},$$

$$\gamma_k^{(i+1,j)} = \frac{(\gamma_{k-1}^{(i,j)} + \bar{\alpha}) p_k}{p_{k-1} + \alpha p_k + \bar{\alpha} - \varkappa_{k-1}^{(i)} p_k}.$$

По индукции легко доказать справедливость следующих соотношений:

$$\gamma_k^{(i,j)} = \theta_0 \zeta_k^{(i,j)} + g_k, \quad k \geqslant 2, \quad |g_k| \leqslant L, \tag{25}$$

$$(K_k^{(i,j)} + l + \mathscr{L}_k^{(i,j)}) \zeta_k^{(i,j)} + (p_{k+1} - 1)\varkappa_k^{(i)} = p_k - \tilde{\gamma}_k^{(i,j)} - 1, \tag{26}$$

$$\tilde{\gamma}_k^{(i,j)} = \theta_0 \zeta_k^{(i,j)} + \tilde{g}_k, \quad 0 < g_k \leqslant L, \tag{27}$$

$$\zeta_k^{(i,j)} \leqslant \frac{p_k - p_{k+1}\varkappa_k^{(i)} - g_k}{\theta_0 + p_1}, \tag{28}$$

$$0 = \varkappa_k^{(1)} < \varkappa_k^{(2)} < \cdots < \varkappa_k^{(k)}, \tag{29}$$

$$K_k > K_{k-1}, \tag{30}$$

$$K_k^{(i,j)} < K_k, \quad i < k, \tag{31}$$

$$\zeta_k^{(i,j)} > \zeta_k, \quad i < k. \tag{32}$$

Здесь θ_0 — положительная постоянная, равная либо $\overline{\beta}$, либо $\overline{\alpha}$ в зависимости от i, $K_k = K_k^{(k,1)}$, $\zeta_k = \zeta_k^{(k,1)}$. Докажем, например, (29). При $k = 2$ неравенство очевидно:

$$\varkappa_2^{(1)} = 0 < \frac{\alpha p_1}{p_1 + \alpha p_2 + \overline{\alpha}} = \varkappa_2^{(2)}.$$

Пусть оно справедливо при $k = s$, тогда

$$\varkappa_{s+1}^{(1)} = 0 < \frac{\alpha p_s}{p_s + \alpha p_{s+1} + \overline{\alpha}} = \varkappa_{s+1}^{(2)},$$

а при $2 \leqslant i \leqslant s$

$$\varkappa_{s+1}^{(i)} = \frac{\alpha p_s}{p_s + \alpha p_{s+1} + \overline{\alpha} - \varkappa_s^{(i-1)} p_{s+1}} < \frac{\alpha p_s}{p_s + \alpha p_{s+1} + \overline{\alpha} - \varkappa_s^{(i)} p_{s+1}} = \varkappa_{s+1}^{(i+1)}.$$

Обозначим $\varkappa_k^{(k)} = \varkappa_k$, $\gamma_k^{(k,1)} = \gamma_k$, $\tilde{\gamma}_k^{(k,1)} = \tilde{\gamma}_k$. Очевидно, что $\mathscr{L}_k^{(k,1)} = \mathscr{L}_{k-1}^{(k-1,1)} = \cdots = \mathscr{L}_1^{(1,1)} = 0$. Из равенств (22) и (26) следует, что

$$\mathscr{L}_k^{(i,j)} = [\alpha p_{k-1} l - p_k + \gamma_k^{(i,j)} - \alpha \tilde{\gamma}_k^{(i,j)} - \varkappa_k^{(i)} (\alpha p_k l - p_{k+1}) +$$

$$+ (l + 1 - \alpha l)\, \zeta_k^{(i,j)}]\, \frac{1}{\alpha \zeta_k^{(i,j)}} \geqslant 0.$$

Следовательно, пользуясь (25) и (27), отсюда имеем

$$\zeta_k^{(i,j)} \geqslant \frac{-\alpha p_{k-1} l + p_k - g_k + \alpha \tilde{g}_k + \varkappa_k^{(i)} (\alpha p_k l - p_{k+1})}{l + 1 - \alpha l + \theta_0 (1 - \alpha)}.$$

Отметим, что

$$\zeta_k = \frac{-\alpha p_{k-1} l + p_k - g_k + \alpha \tilde{g}_k + \varkappa_k (\alpha p_k l - p_{k+1})}{l + 1 - \alpha l + \theta_0 (1 - \alpha)},$$

поскольку $\mathscr{L}_k^{(k,1)} = 0$. Обозначим $\delta_k = p_k / \zeta_k$, $h_k = \delta_k - \delta_{k-1}$. При $k \geqslant 2$ $\delta_k = (\alpha / \varkappa_k)\, \delta_{k-1}$. Значит $\delta_k / \delta_{k-1} = \alpha / \varkappa_k$ или

$$\delta_k = \delta_{k-1} + \alpha \frac{p_k}{p_{k-1}} \delta_{k-1} - \frac{\varkappa_{k-1}}{\alpha p_{k-1}} p_k \alpha \delta_{k-1} + \frac{\overline{\alpha} \delta_{k-1}}{p_{k-1}} \quad \text{или}$$

$$h_k = \frac{\alpha p_k}{p_{k-1}} h_{k-1} + \overline{\alpha} \frac{\delta_{k-1}}{p_{k-1}}.$$

Поскольку

$$\delta_k = \frac{p_k}{\zeta_k} = \frac{[1 + l - \alpha l + \theta_0 (1 - \alpha)]\, p_k}{p_k - \alpha l p_{k-1} - g_k + \alpha \tilde{g}_k + \varkappa_k (\alpha p_k l - p_{k+1})}, \tag{33}$$

то $\{\delta_k\}$ ограничена. Значит, как нетрудно показать, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ сходится. В силу монотонности $\{\delta_k\}$ существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \varkappa_k = \lim_{k \to \infty} \frac{\alpha \delta_{k-1}}{\delta_k} = \alpha. \tag{34}$$

Далее легко показать по индукции, что

$$C_k^{(i,j)} \leqslant \prod_{N=2}^{k} (\overline{c}_N)^{1/(m+1)(1-\beta)\zeta_{N-1}},$$

откуда следует

$$C_k^{(i,j)} \leqslant \left[\prod_{N=2}^{\infty} (\overline{c}_N)^{\frac{1}{p_N}} \right]^{\frac{1}{(m+1)(1-\beta)} \lim\limits_{k \to \infty} \frac{p_k}{\zeta_k}} = C < \infty. \tag{35}$$

Соединяя воедино выше сказанное, можно сделать следующий вывод. Если $\tilde{E}_{p_1}(t)$ и $\tilde{E}_{p_{k+1}}(t)$, $k \geqslant 2$ — произвольные оценивающие соответственно $E_{p_1}(t)$ и $E_{p_k}(t)$ функции, удовлетворяющие условию II, а $\tilde{\mu}(t)$ — произвольная оценивающая $\mu(t)$ функция, удовлетворяющая условию III, то имеют место неравенства

$$E_{p_k}(t) \leqslant \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ 1\leqslant j\leqslant 2^{k-i-1}}} \left[C_k^{(i,j)} \left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}} \right)^{K_k^{(i,j)}} \tilde{E}_{p_1}(t); \right.$$

$$\left. \left(t^{-\frac{1}{m+1}}\right)^{\mathscr{L}_k^{(i,j)}/(1-\beta)} \right]^{\zeta_k^{(i,j)}} \tilde{E}_{p_{k+1}}^{\varkappa_k^{(i)}}(t).$$

При этом $0 \leqslant \varkappa_k^{(i)} \leqslant \varkappa_k$, $\zeta_k \leqslant \zeta_k^{(i,j)} \leqslant \dfrac{p_k - p_{k+1}\varkappa_k^{(i)} - g_k}{\theta_0 + p_1}$,

$$\alpha K_k^{(i,j)} = \frac{p_k - p_{k+1}\varkappa_k^{(j)} - g_k}{\zeta_k^{(i,j)}} - p_1 - \theta_0.$$

Следовательно, при $k \geqslant 2$ с учетом (35) получаем

$$E_{p_k}(t) \leqslant \max_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant\varkappa_k \\ \tilde{\eta}_k\leqslant\eta\leqslant \frac{p_k-p_{k+1}\xi-g_k}{\theta_0+p_1}}} \left\{ (C\tilde{E}_{p_1})^{\eta} \left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}}{t^{1/(m+1)}} \right)^{\frac{p_k-p_{k+1}\xi-g_k}{\alpha} - \frac{(p_1+\theta_0)\eta}{\alpha}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(t^{-\frac{1}{m+1}}\right)^{\frac{\eta/\alpha[(1+l-\alpha l+(1-\alpha)\theta_0)+\xi\left(\frac{p_{k+1}}{\alpha}-p_k l\right)-\left(\frac{p_k}{\alpha}-lp_{k-1}\right)+g_k-\alpha\tilde{g}_k]}{1-\beta}} \tilde{E}_{p_{k+1}}^{\xi}(t) \right\}, \tag{36}$$

где

$$\tilde{\eta}_k = \frac{p_k - \alpha l p_{k-1} + \xi(\alpha p_k l - p_{k+1}) - g_k + \alpha\tilde{g}_k}{1 + \theta_0(1-\alpha) + l(1-\alpha)}.$$

Поскольку область, по которой берется максимум, является четырехугольником, а функция $b^{a_1+a_2\xi+a_3\eta}$ при любых действительных a_1, a_2 и a_3 достигает максимума по четырехугольнику в одной из его вершин, то из (46) получаем

$$E_{p_k}(t) \leqslant \max \left\{ (C\tilde{E}_{p_1}(t))^{\frac{p_k-\alpha l p_{k-1}-g_k+\alpha\tilde{g}_k}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\mu^{\alpha}}{t^{1/(m+1)}} \right)^{\frac{p_k-g_k}{\alpha} - \frac{(p_1+\theta_0)}{\alpha}\frac{(p_k-\alpha l p_{k-1}-g_k+\alpha\tilde{g}_k)}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}},$$

$$(C\tilde{E}_{p_1})^{\frac{p_k-g_k}{\theta_0+p_1}} t^{-\frac{1}{(m+1)/(1-\beta)}\left[\frac{(1+l-\alpha l+(1-\alpha)\theta_0)(p_k-g_k)}{\alpha(l+1+\theta_0)} - \left(\frac{p_k}{\alpha} - lp_{k-1}\right) + \frac{g_k-\alpha\tilde{g}_k}{\alpha}\right]},$$

$$(C\tilde{E}_{p_1}(t))^{\frac{p_k-\alpha l p_{k-1}+\varkappa_k(\alpha l p_k-p_{k+1})-g_k+\alpha\tilde{g}_k}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}} \times$$

$$\times \left(\frac{\tilde{\mu}^{\alpha}(t)}{t^{1/(m+1)}} \right)^{\frac{p_k-p_{k+1}\varkappa_k-g_k}{\alpha} - \frac{(p_1+\theta_0)}{\alpha}\frac{(p_k-\alpha l p_{k-1}+\varkappa_k(\alpha l p_k-p_{k+1})-g_k+\alpha\tilde{g}_k)}{(1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha))}} \times$$

$$\times (\tilde{E}_{p_{k+1}}(t))^{\varkappa_k}, \quad (C\tilde{E}_{p_1}(t))^{\frac{p_k-g_k-p_{k+1}\varkappa_k}{p_1+\theta_0}} \times$$

$$\times t^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)}\left(\frac{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)(p_k-g_k-p_{k+1}\varkappa_k)}{\alpha(\theta_0+p_1)} + \varkappa_k\left(\frac{p_{k+1}}{\alpha} - lp_k\right)\right)} \times$$

$$\left. \times t^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)}\left(-\left(\frac{p_k}{\alpha} - lp_{k-1}\right) + \frac{g_k-\alpha\tilde{g}_k}{\alpha}\right)} (\tilde{E}_{p_{k+1}}(t))^{\varkappa_k} \right\}. \tag{37}$$

Пусть $\tilde{M}(t)$ — произвольная оценивающая $M(t)$ функция для всех $t > 0$ удовлетворяет условию: I′) функция $t^{\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\bar{\beta})}}\tilde{M}(t)$ монотонно убывает.

Пусть $\tilde{E}_{p_{k+1}}(t) = E_1\tilde{M}^{p_{k+1}-1}(t)$, $\tilde{E}_{p_1}(t) = E_1\tilde{M}^l(t)$. Эти функции удовлетворяют условию II, поскольку выполняется условие I′. Следовательно, подставляя их в неравенство (37), возводя обе части в степень $1/p_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$M(t) \leqslant \max\left\{C(\tilde{M}^l(t))^{\frac{1-\alpha}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}}\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}},\right.$$

$$(C\tilde{M}^l(t))^{\frac{1}{l+1+\theta_0}}t^{-\frac{1}{(m+1)/(1-\beta)}\frac{1}{(l+1+\theta_0)}},\quad (C\tilde{M}^l(t))^{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha l)}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}+\alpha l}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1-\alpha l}{1+l-\alpha l+\theta_0(1-\alpha)}},\quad (C\tilde{M}^l(t))^{\frac{1-\alpha l}{l+1+\theta_0}+\alpha l}t^{-\frac{1-\alpha l}{(m+1)/(1-\beta)(1+l+\theta_0)}}\right\}. \tag{38}$$

Применяя теперь лемму 3 к неравенству (38), находим

$$M(t) \leqslant \max\left\{C\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0(1-\alpha)}},\quad Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\theta_0)}},\right.$$

$$\left.C\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0(1-\alpha)}},\quad Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\theta_0)}}\right\} =$$

$$= \max\left\{C\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1}{1+\theta_0(1-\alpha)}},\quad Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\theta_0)}}\right\}.$$

В силу того что $\bar{\beta} > \bar{\alpha}$, последнее неравенство перепишем в виде

$$M(t) \leqslant \max\left\{C\left(\frac{\tilde{\mu}^\alpha(t)}{t^{1/(m+1)}}\right)^{\frac{1}{1+\bar{\beta}(1-\alpha)}},\quad Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\bar{\beta})}}\right\}. \tag{39}$$

Из леммы 2 $\forall\,\varepsilon > 0$ следует оценка

$$\mu(t) \leqslant 2\mu_0 + Ct^{\frac{1+\varepsilon}{m+1}}\tilde{M}^{\frac{(1+\varepsilon)(m-1)}{m+1}+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}}(t) \equiv \tilde{\mu}(t).$$

Если функция $\tilde{M}$ удовлетворяет условию I′, то $\tilde{\mu}(t)$ удовлетворяет условию III, значит ее можно подставить в (39). Это даст

$$M(t) \leqslant \max\left\{Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1+\bar{\beta}(1-\alpha))}},\quad Ct^{-\frac{1}{(m+1)(1-\beta)(1+\bar{\beta})}},\right.$$

$$\left.Ct^{-\frac{(1-(1+\varepsilon)\alpha)(1-\alpha)}{(m+1)(1-\alpha)(1+\bar{\beta}(1-\alpha))-\alpha((m-1)(1-\alpha)(1+\varepsilon)+\varepsilon(m+1))}}\right\}. \tag{40}$$

Отсюда при достаточно больших $t > 0$ вытекает

$$M(t) \leqslant Ct^{-\frac{(1-(1+\varepsilon)\alpha)(1-\alpha)}{(1-(1+\varepsilon)\alpha)((m-1)(1-\alpha)-m+1)+(1-\alpha)((m+1)\bar{\beta}(1-\alpha)-(m-1))}}. \tag{41}$$

Если $\alpha = \beta$, то из (41) следует

$$M(t) \leqslant Ct^{-\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(m-1)+m+1}}. \tag{42}$$

Подставляя в правую часть для оценки момента в роли $\tilde{M}(t)$

$$Ct^{-\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(m-1)+m+1}} \text{ и } Ct^{-\frac{(1-(1+\varepsilon)\alpha)(1-\alpha)}{(1-\alpha(1+\varepsilon))((m-1)(1-\alpha)+m+1)+(1-\alpha)((m+1)\bar{\beta}(1-\alpha)-(m-1))}},$$

получаем соответственно оценки (при достаточно больших $t > 0$) для $\mu(t)$:

$$\mu(t) \leqslant Ct^{\frac{1}{(m-1)(1-\alpha)+m+1}}, \tag{43}$$

$$\mu(t) \leqslant Ct^{\frac{1+\varepsilon}{m+1} - \frac{((m-1)(1+\varepsilon)(1-\alpha)+\varepsilon(m+1))(1-(1+\varepsilon)\alpha)}{(m+1)((1-(1+\varepsilon)\alpha)((m-1)(1-\alpha)+m+1)+(1-\alpha)((m+1)\bar{\beta}(1-\alpha)-(m-1)))}}. \tag{44}$$

Обозначим показатель роста в правой части (44) через $\lambda(\varepsilon)$. Очевидно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\lambda(\varepsilon) > 0$. Для оценки снизу $M(t)$ воспользуемся неравенством (13), в котором в роли $\tilde{\mu}(t)$ возьмем соответственно функции $Ct^{1/((m-1)(1-\alpha)+m+1)}$ и $ct^{\lambda(\varepsilon)}$. Это даст

$$M(t) \geqslant ct^{-\frac{1-\alpha}{(m-1)(1-\alpha)+m+1}}, \tag{45}$$

$$M(t) \geqslant ct^{-(1-\alpha)\lambda(\varepsilon)}. \tag{46}$$

Следовательно, теорема доказана.

Замечание 3. Теорема дает точную оценку скорости стабилизации решения задачи (1) — (3) в D в классе областей $\sigma(\alpha, \alpha)$, $\alpha \geqslant (n-1)/n$, $\alpha < 1$. Кроме того, если положить $m = 1$ (линейный случай), тогда также получаем точную скорость стабилизации для произвольных α и β; $(n-1)/n \leqslant \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$. В этом случае оценки совпадают с аналогичными оценками [2].

Отметим, что эти результаты без труда обобщаются на более широкие классы квазилинейных параболических уравнений второго порядка.

1. *Гущин А. К.* Об оценке интеграла Дирихле в неограниченных областях // Мат. сб.— 1976.— **99**, № 2.— С. 282—294.
2. *Гущин А. К.* Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Там же.— 1976.— **101**, № 4.— С. 459—499.
3. *Лежнев А. В.* О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Там же.— 1986.— **129**, № 2.— С. 186—200.
4. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, № 2.— С. 135—176.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 01.11.90